



Politecnico  
di Torino

Dipartimento di Scienze  
Matematiche "G. L. Lagrange"

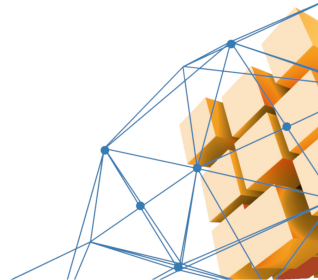


METODI QUANTITATIVI PER LA GESTIONE DEL RISCHIO

# Robust international portfolio optimization with worst-case mean-CVaR

F. Luan, W. Zhang, Y. Liu

Giulio Nenna, Riccardo Kiefer, Simona Di Battista



## Introduzione

L'obiettivo di questo lavoro è quello di proporre un modello di ottimizzazione robusta di portafoglio per investimenti in asset relativi a mercati finanziari esteri.

Il portafoglio, oltre ad essere esposto al rischio relativo al rendimento degli asset, è quindi esposto anche al rischio relativo al cambio di valuta.

Siano

- $\tilde{\epsilon}_i$  il return sul cambio tra la valuta di casa e l' $i$ -esima valuta estera.
- $\tilde{a}_i$  il return dell'asset valutato nell' $i$ -esima valuta estera.

Allora il return dell'asset espresso nella valuta di casa sarà dato da:

$$(1 + \tilde{a}_i)(1 + \tilde{\epsilon}_i) - 1 = \tilde{a}_i\tilde{\epsilon}_i + \tilde{a}_i + \tilde{\epsilon}_i$$



## Return del portafoglio

Sia  $x_i$  la frazione di ricchezza allocata nell' $i$ -esimo asset relativo all' $i$ -esimo mercato. Allora il return del portafoglio sarà dato da:

$$r(x) = \sum_{i=1}^n (\tilde{a}_i \tilde{e}_i + \tilde{e}_i + \tilde{a}_i) x_i \quad (1)$$

L'eq.ne 1 può essere espressa in termini matriciali utilizzando la seguente notazione:

$$\begin{aligned} \tilde{\xi} &= (\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_n, \tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n) \in \mathbb{R}^{2n} & X &= \text{diag}(x) \in \mathbb{R}^{n \times n} \\ B &= \begin{bmatrix} 0_{n \times n} & \frac{1}{2} X \\ \frac{1}{2} X & 0_{n \times n} \end{bmatrix} & H_1 &= \begin{bmatrix} I_{n \times n} \\ 0_{n \times n} \end{bmatrix} & H_2 &= \begin{bmatrix} 0_{n \times n} \\ I_{n \times n} \end{bmatrix} \\ r(x, \tilde{\xi}) &= \tilde{\xi}^T H_1 x + \tilde{\xi}^T H_2 x + \tilde{\xi}^T B \tilde{\xi} \end{aligned} \quad (2)$$

La funzione di perdita sarà invece:

$$f(x, \tilde{\xi}) = -r(x, \tilde{\xi}) \quad (3)$$

## Misura di rischio worst-case

### Contesto

Visto che la distribuzione del ritono degli assets e tassi di cambio non sono sempre simmetriche in questo paper viene utilizzata come misura di rischio il CVaR che rispetto al VaR è una misura di rischio coerente.

- Probabilità funzione di perdita  $f(\mathbf{x}, \tilde{\xi})$  non supera soglia  $\alpha$ :

$$H(\mathbf{x}, \alpha, P) = \int_{f(\mathbf{x}, \tilde{\xi}) \leq \alpha} dP(\tilde{\xi}).$$

- Dato livello confidenza  $\beta$  e un portafoglio  $\mathbf{x}$ :

$$VaR(\mathbf{x}, P) = \min\{\alpha \in \mathbb{R} : H(\mathbf{x}, \alpha, P) \geq \beta\}.$$

- Conditional value at Risk:

$$CVaR(\mathbf{x}, P) = \frac{1}{1 - \beta} \int_{f(\mathbf{x}, \tilde{\xi}) \geq VaR(\mathbf{x}, P)} f(\mathbf{x}, \tilde{\xi}) dP(\tilde{\xi}).$$

- Può essere ricavato dalla minimizzazione di:

$$G_{\beta}(\mathbf{x}, \alpha) = \alpha + \frac{1}{1 - \beta} \int_{\tilde{\xi} \in \mathbb{R}^n} [f(\mathbf{x}, \tilde{\xi}) - \alpha]^+ dP(\tilde{\xi}).$$

- $CVaR_{\beta}(\mathbf{x}, P) = \min_{\alpha \in \mathbb{R}} G_{\beta}(\mathbf{x}, \alpha)$ .
- Avendo a disposizione  $m$  osservazioni storiche di  $\tilde{\xi}$ :

$$\hat{P}(\tilde{\xi} = \hat{\xi}_i) = \frac{1}{m} \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

e

$$\hat{G}_{\beta}(\mathbf{x}, \alpha) = \alpha + \frac{1}{(1 - \beta)m} \sum_{i=1}^m [f(\mathbf{x}, \hat{\xi}_i) - \alpha]^+.$$

- Nel caso robusto si assume che  $P$  appartiene ad un insieme di ambiguità distribuzionale  $\mathcal{P}$ . Dato un portafoglio  $\mathbf{x}$  il worst-case CVaR è:

$$WCVaR_{\beta}(\mathbf{x}, \mathcal{P}) = \max_{P \in \mathcal{P}} CVaR_{\beta}(\mathbf{x}, P)$$

## Formulazione del modello

### Modello di selezione di portafoglio internazionale in media-CVaR

- Basato su scenari:

$$(\text{SIMC}) \quad \min_{\mathbf{x}} - (1 - \lambda) \text{RETURN}(\mathbf{x}) + \lambda \text{CVaR}_{\beta}(\mathbf{x}) \quad (4)$$

$$\text{s.t.} \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{x}^T \mathbf{e} = 1, \quad \mathbf{x} \geq 0 \quad (5)$$

Dove  $\lambda \in [0, 1]$  e

$$\text{RETURN}(\mathbf{x}) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m r(\mathbf{x}, \hat{\xi}_i) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \hat{\xi}_i^T H_1 \mathbf{x} + \hat{\xi}_i^T H_2 \mathbf{x} + \hat{\xi}_i^T B \hat{\xi}_i$$

- Robusto:

$$(\mathcal{P} - \text{RIMC}) \quad \min_{\mathbf{x}} - (1 - \lambda) \text{WRETURN}(\mathbf{x}, \mathcal{P}) + \lambda \text{WCVaR}_{\beta}(\mathbf{x}, \mathcal{P}) \quad (6)$$

$$\text{s.t.} \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{x}^T \mathbf{e} = 1, \quad \mathbf{x} \geq 0. \quad (7)$$

Dove  $\lambda \in [0, 1]$  e  $\text{WRETURN}(\mathbf{x}, \mathcal{P}) = \min_{P \in \mathcal{P}} \mathbb{E}_P[r(\mathbf{x}, \tilde{\xi})]$

## Formulazione del modello

### Costruzione insieme di supporto per la distribuzione di $\xi$

Siano  $\tilde{c}_{ij}$  i return relativi al cambio tra la  $i$ -esima valuta e la  $j$ -esima valuta. Ricordando che il return relativo al cambio della valuta di casa e la  $i$ -esima valuta è definito come  $\tilde{e}_i$ , sotto **ipotesi di non arbitraggio** nei mercati valutari deve valere:

$$1 + \tilde{c}_{ij} = \frac{(1 + \tilde{e}_i)}{(1 + \tilde{e}_j)} \quad i, j \in \{1, \dots, n\} \quad i \geq j \quad (8)$$

Si tratta di  $n(n-1)/2$  vincoli di uguaglianza non lineari riformulabili come  $n(n-1)$  vincoli di disuguaglianza lineari assumendo intervalli di deviazione dalla condizione di non arbitraggio:

$$a_{ij} \leq \tilde{c}_{ij} \leq d_{ij} \quad i, j \in \{1, \dots, n\} \quad i \geq j$$

Ottenendo quindi

$$(1 + a_{ij})(1 + \tilde{e}_j) \leq (1 + \tilde{e}_i) \leq (1 + d_{ij})(1 + \tilde{e}_j) \quad i, j \in \{1, \dots, n\} \quad i \geq j \quad (9)$$

## Formulazione del modello

### Costruzione insieme di supporto per la distribuzione di $\tilde{\xi}$

I vincoli in 9 possono essere riscritti in forma compatta:

$$\mathbf{A}\tilde{\xi} \leq \mathbf{a} \quad \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n(n-1) \times 2n}, \quad \mathbf{a} \in \mathbb{R}^{n(n-1)} \quad (10)$$

Dove  $\mathbf{A}$  riflette le relazioni tra i return espressi nell'eq. 9.

Assumendo inoltre che

$$\mathbf{b}_1 \leq \tilde{\xi} \leq \mathbf{b}_2 \quad (11)$$

Si arriva a costruire il support set per  $\tilde{\xi}$ :

$$\zeta = \{\tilde{\xi} : \mathbf{b}_1 \leq \tilde{\xi} \leq \mathbf{b}_2, \mathbf{A}\tilde{\xi} \leq \mathbf{a}\}$$

Incorporato nell'insieme di ambiguità distribuzionale dei return sugli asset ed i tassi di cambio.

## Formulazione del modello

### Modello di ottimizzazione robusta con insieme di supporto $\zeta$

Si utilizza l'insieme di ambiguità proposto da **Delage e Ye (2010)**:

$$\mathcal{P}_1(\zeta, \hat{\mu}, \hat{\Sigma}, \lambda_1, \lambda_2) = \begin{cases} P(\tilde{\xi} \in \zeta) = 1 \\ P \in \mathcal{M} \|(\mathbb{E}(\tilde{\xi}) - \hat{\mu})^T \hat{\Sigma}^{-1} (\mathbb{E}(\tilde{\xi}) - \hat{\mu})\| \leq \lambda_1 \\ \mathbb{E}[(\tilde{\xi} - \hat{\mu})(\tilde{\xi} - \hat{\mu})^T] \preceq \lambda_2 \hat{\Sigma} \end{cases}$$

I parametri  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  riflettono la dimensione dell'insieme. Sotto  $\mathcal{P}_1$  si costruisce il modello:

$$\begin{aligned} (RIMC^+) \quad & \min_{\mathbf{x}} - (1 - \lambda) WRETURN(\mathbf{x}, \mathcal{P}_1) + \lambda WCVaR_{\beta}(\mathbf{x}, \mathcal{P}_1) \\ & \text{s.t.} \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{x}^T \mathbf{e} = 1, \quad \mathbf{x} \geq 0. \end{aligned}$$

Dove  $\lambda \in [0, 1]$ ,  $WRETURN(\mathbf{x}, \mathcal{P}_1) = \min_{P \in \mathcal{P}_1} \mathbb{E}_P[r(\mathbf{x}, \tilde{\xi})]$  e  
 $WCVaR_{\beta}(\mathbf{x}, \mathcal{P}_1) = \max_{P \in \mathcal{P}_1} CVaR_{\beta}(\mathbf{x}, P) = \max_{P \in \mathcal{P}_1} \min_{\alpha} G_{\beta}(\mathbf{x}, \alpha)$

## Formulazione del modello

### Riformulazione come problema di programmazione semi-definita

**Teorema 4** Il problema ( $RIMC^+$ ) è equivalente al seguente problema di programmazione semi-definita:

$$\begin{aligned} & \max_{\mathbf{x}, \alpha, p_1, \mathbf{M}, \mathbf{V}, \mathbf{v}, s, p_2, p_4, p_5, p_6, p_7, q_1, \mathbf{Q}, \mathbf{U}, \mathbf{h}, t, q_2, q_3, q_4} \\ & - (1 - \lambda)(-q_1 - \lambda_2(\langle \hat{\Sigma}, \mathbf{Q} \rangle)) + \lambda \left( \alpha + \frac{1}{(1 - \beta)} p_1 + \frac{\lambda_2}{(1 - \beta)} \langle \hat{\Sigma}, \mathbf{M} \rangle \right)^1 \quad (12) \end{aligned}$$

Dove  $\langle A, B \rangle = \text{tr}(A^T B)$  indica il prodotto di Frobenius tra matrici.

---

<sup>1</sup>Per motivi di spazio e tempo si rimanda all'appendice del paper per la dimostrazione del teorema e l'esposizione dei vincoli. Comunque non rilevanti ai fini della presentazione.

## Formulazione modello

### Benchmark models $RIMC^-$ e $RIMC$

- $RIMC^-$  considera l'ambiguità dei momenti primi e secondi ma non incorpora il set di supporto  $\zeta$ :

$$\mathcal{P}_2(\hat{\mu}, \hat{\Sigma}, \lambda_1, \lambda_2) = \begin{cases} P(\tilde{\xi} \in \mathbb{R}^{2n}) = 1 \\ P \in \mathcal{M} \mid \|(\mathbb{E}(\tilde{\xi}) - \hat{\mu})^T \hat{\Sigma}^{-1}(\mathbb{E}(\tilde{\xi}) - \hat{\mu})\| \leq \lambda_1 \\ \mathbb{E}[(\tilde{\xi} - \hat{\mu})(\tilde{\xi} - \hat{\mu})^T] \preceq \lambda_2 \hat{\Sigma} \end{cases}$$

- $RIMC$  incorpora il set di supporto  $\zeta$  ma non considera l'ambiguità dei momenti primi e secondi:

$$\mathcal{P}_3(\zeta, \hat{\mu}, \hat{\Sigma}) = \begin{cases} P(\tilde{\xi} \in \zeta) = 1 \\ P \in \mathcal{M} \mid \mathbb{E}(\tilde{\xi}) = \hat{\mu} \\ \mathbb{E}[(\tilde{\xi} - \hat{\mu})(\tilde{\xi} - \hat{\mu})^T] = \hat{\Sigma} \end{cases}$$

Entrambi i problemi vengono riformulati come problemi di programmazione semi-definita similmente a quanto fatto con il modello  $RIMC^+$ .

## Esperimenti numerici

### Design dell'esperimento

Si effettuano esperimenti su tre periodi di tempo differenti:

- Periodo totale dal 2 Settembre, 1994 al 24 Settembre, 2021.
- Crisi finanziaria asiatica dal 4 Luglio, 1997 al 31 Dicembre, 1998.
- Periodo stabile dal 11 Febbraio, 2011 al 24 Settembre, 2021.

Viene confrontato modello  $RIMC^+$  con modelli benchmark:

- $RIMC^-$  e  $RIMC$ .
- $EW$  (Equally weighted).
- $SIMC$  (Scenario based).

Dal momento che negli esperimenti  $WCVaR_\beta(\mathbf{x}, \mathcal{P})$  risulta essere circa 1000 volte più grande di  $WRETURN(\mathbf{x}, \mathcal{P})$ , vengono presentati i risultati con un coefficiente di avversione al rischio pari a  $\lambda = 0.002$  in modo tale da rendere confrontabili le due quantità.

## Esperimenti numerici

### Weekly rolling windows strategy

L'unità temporale utilizzata in questo studio è settimanale, pertanto quelli disponibili sono i return settimanali.

Gli esperimenti vengono eseguiti utilizzando la *rolling window strategy*. In particolare, data una finestra iniziale di 100 settimane ( $\sim 2$  anni), per ciascuna finestra temporale:

- 1 Si calcolano  $\hat{\mu}$  e  $\hat{\Sigma}$
- 2 Si stimano  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  utilizzando  $\hat{\mu}$  e  $\hat{\Sigma}^2$
- 3 Si calcolano i portafogli ottimali secondo ciascun modello in test.
- 4 Si misurano i return settimanali.
- 5 Si fa scorrere la finestra temporale di una settimana e si ripete dal punto 1.

---

<sup>2</sup>Per la stima di  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  si utilizza un metodo approssimato a partire da un'implementazione documentata in [DY10]



## Esperimenti numerici

### Composizione portafoglio

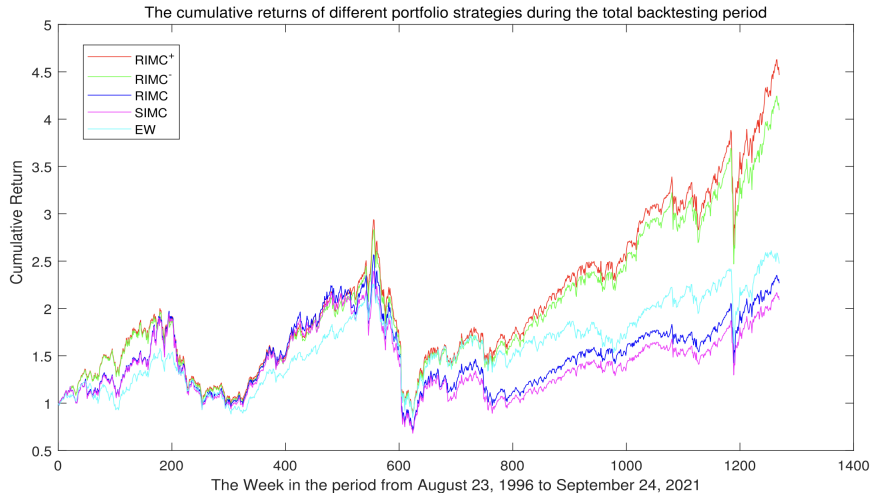
Si considera un investitore cinese che investe in azioni di indici:

- Giappone (Nikkei 225) → yen (JPY).
- Hong Kong (Hang Seng) → hong kong dollar (HKD).
- Regno Unito (FTSE 100) → pound (GBP).
- Australia (SP 200) → australian dollar (AUD).
- Canada (Toronto 300) → canadian dollar (CAD).



# Esperimenti numerici

## Periodo Totale



# Esperimenti numerici

## Periodo Totale

	Mean ( $10^{-4}$ )	Std. dev. ( $10^{-3}$ )	Sharpe ratio (%)	Downside Sharpe (%)	UP ratio (%)	VaR (%)	Mean/VaR (%)	CVaR (%)	Mean/CVaR ( $10^{-3}$ )
RIMC <sup>+</sup>	15.46	26.71	5.79	5.58	51.91	4.22	3.67	128.71	1.20
RIMC <sup>-</sup>	14.70	26.44	5.56**(0.0421)	5.33	51.45	4.18	3.52	128.16	1.15
RIMC	11.04	29.74	3.71**(0.0286)	3.47	48.60	4.59	2.40	147.60	0.75
SIMC	10.37	29.66	3.50**(0.0176)	3.27	48.37	4.59	2.26	147.19	0.70
EW	10.24	24.53	4.17(0.1168)	3.97	48.89	3.62	2.83	118.20	0.87

Figura: Tabella valori diversi indicatori di performance

# Esperimenti numerici

## Crisi Finanziaria

	Mean ( $10^{-4}$ )	Std. dev. ( $10^{-3}$ )	Sharpe ratio (%)	Downside Sharpe (%)	UP ratio (%)	VaR (%)	Mean/VaR (%)	CVaR	Mean/CVaR ( $10^{-3}$ )
RIMC <sup>+</sup>	36.02	25.65	14.04	15.64	75.03	4.21	8.55	0.95	3.78
RIMC <sup>-</sup>	35.03	25.58	13.69(0.1240)	15.23	74.81	4.09	8.56	0.94	3.72
RIMC	26.26	28.22	9.31(0.1131)	9.62	65.16	4.59	5.73	1.17	2.24
SIMC	25.37	28.03	9.05*(0.0920)	9.29	64.69	4.59	5.53	1.17	2.16
EW	-0.72	27.44	-0.26**(0.0209)	-0.26	56.64	5.01	-0.14	1.14	-0.06

Figura: Tabella valori diversi indicatori di performance

# Esperimenti numerici

## Periodo Stabile

	Mean ( $10^{-3}$ )	Std. dev. ( $10^{-3}$ )	Sharpe ratio (%)	Downside Sharpe (%)	UP ratio (%)	VaR (%)	Mean/VaR (%)	CVaR	Mean/CVaR ( $10^{-3}$ )
RIMC <sup>+</sup>	2.01	22.24	9.02	8.92	54.73	3.34	6.01	1.10	1.83
RIMC <sup>-</sup>	1.90	22.26	8.54** (0.0182)	8.35	53.55	3.34	5.70	1.11	1.71
RIMC	1.15	22.89	5.01*** (0.0030)	4.75	49.95	3.78	3.03	1.17	0.98
SIMC	1.16	22.95	5.06*** (0.0038)	4.80	50.03	3.78	3.07	1.17	0.99
EW	0.93	21.05	4.41** (0.0185)	4.22	49.08	3.04	3.06	1.05	0.88



Figura: Tabella valori diversi indicatori di performance

## Conclusioni

I risultati sperimentali permettono di concludere che:

- Il modello  $RIMC^+$  ha la migliore performance out-of-sample in termini di ritorno e di varie misure di rischio durante tutti e tre i periodi.
- Investitori possono trarre benefici impiegando una strategia di ottimizzazione robusta basata sulla costruzione di un nuovo insieme di supporto definito da deviazioni dall' **ipotesi di non arbitraggio** nei mercati valutari e tenendo conto dell'**ambiguità dei momenti primo e secondo** nel return degli assets e dei tassi di cambio.

## References I

-  Erick Delage and Yinyu Ye, *Distributionally robust optimization under moment uncertainty with application to data-driven problems*, *Operations Research* **58** (2010), no. 3, 595–612.
-  Y. Liu F. Luan, W. Zhang, *Robust international portfolio optimization with worst-case mean-cvar*, School of Business Administration, South China University of Technology, Guangzhou, China, 2022.



Grazie per l'attenzione



Politecnico  
di Torino